לוגיקה (א) תרגיל 4 פתרונות

.1

(א) נוכיח באינדוקציה על $n \geq 1$:

- $n = 1$: $t^1_\vee(x_1) = F \iff t_\vee(t^0_\vee(), x_1) = F \iff t_\vee(F, x_1) = F \iff x_1 = F$
  $t^1_\wedge(x_1) = T \iff t_\wedge(t^0_\wedge(), x_1) = T \iff t_\wedge(T, x_1) = T \iff x_1 = T$
- $n > 1$: $t^n_\vee(x_1, ..., x_n) = F$ אםם $t_\vee(t^{n-1}_\vee(x_1, ..., x_{n-1}), x_n) = F$ אםם $t^{n-1}_\vee(x_1, ..., x_{n-1}) = F$ וגם $x_n = F$ אםם (לפי ה.א.) $x_i = F$ לכל $1 \leq i \leq n$.
  $n > 1$: $t^n_\wedge(x_1, ..., x_n) = T$ אםם $t_\wedge(t^{n-1}_\wedge(x_1, ..., x_{n-1}), x_n) = T$ אםם $t^{n-1}_\wedge(x_1, ..., x_{n-1}) = T$ וגם $x_n = T$ אםם (לפי ה.א.) $x_i = T$ לכל $1 \leq i \leq n$.

(ב) לאור ההגדרה שבתרגיל ההסכם הנ"ל מאפשר להגדיר את האיווי והגימום המרובים באינדוקציה, כך שצעד האינדוקציה מ-0 ל-1 עובד.

.2

(א) $t_\phi = t_\wedge(x_1, t_\vee(t_\neg(t_\to(x_2, x_1)), x_3))$.

(ב) $t_\phi = t_\neg\left(t_\vee\left(x_1, t_\vee\left(x_2, x_3\right)\right)\right)$.

(ג) $t_\phi = t_\to\left(t_\wedge\left(x_1, x_2\right), t_\neg\left(t_\vee\left(x_2, x_3\right)\right)\right)$.

(ד) $t_\phi = \left(t_\to\left(x_1, t_\to\left(x_2, x_3\right)\right)\right)$.

.3

(א) כל לוח אמת הוא פונקציה מ-$\{T, F\}^n$ ל-$\{T, F\}$. כלומר מקבוצה בת 2^n איברים לקבוצה בת 2 איבריםץ מספר הפונקציות כנ"ל הוא $2^{(2^n)}$. לכן המספר המירבי של לוחות אמת n-מקומיים הוא $2^{(2^n)}$.

(ב) החסם הוא $2^{(2^n)}$. בכל קבוצת פסוקים מ-L המונה יותר מ-$2^{(2^n)}$ פסוקים יש לפי (א) לפחות שני פסוקים שיש להם אותו לוח אמת ולכן הם שקולים.

.4

(א) לפי ההגדרה. כל מודל ל-Γ הוא מודל לכל הפסוקים ב-Γ ובפרט ל-ϕ.

(ב) נניח $\Gamma \models \phi \to \psi$. יהי $\mathfrak{A}$ מודל ל-$\Gamma \cup \{\phi\}$. בפרט $\mathfrak{A}$ מודל ל-Γ ולכן $\mathfrak{A}(\phi \to \psi) = T$. אבל $\mathfrak{A}$ מודל ל-$\{\phi\}$ כלומר $\mathfrak{A}(\phi) = T$ ולכן מהגדרת לוח האמת של $\phi \to \psi$ נקבל: $\mathfrak{A}(\phi \to \psi) = T$ כנדרש.
נניח $\Gamma \cup \{\phi\} \models \psi$. יהי $\mathfrak{A}$ מודל ל-Γ. אם $\mathfrak{A}(\phi) = F$ אז $\mathfrak{A}(\phi \to \psi) = T$ כנדרש. אם $\mathfrak{A}(\phi) = T$ אז יהי $\mathfrak{A}$ מודל ל-$\Gamma \cup \{\phi\}$ ומהנתון $\mathfrak{A}$ מודל ל-ψ כנדרש.

(ג) נניח $\Delta \subseteq \Gamma$ ו-$\Delta \models \phi$. יהי $\mathfrak{A}$ מודל ל-Γ. אז לפי $\Delta \subseteq \Gamma$, $\mathfrak{A}$ מודל גם ל-Γ, ולפי $\Delta \models \phi$, $\mathfrak{A}$ מודל ל-ϕ כנדרש.

(ד) נניח $\Gamma \cup \{\phi\}$ אינה עיקבית. יהי $\mathfrak{A}$ מודל ל-Γ. אם בשלילה $\mathfrak{A}$ מודל גם ל-ϕ נקבל סתירה להנחה ש-$\Gamma \cup \{\phi\}$ אינה עיקבית. לכן $\mathfrak{A}$ אינו מודל ל-ϕ כלומר $\mathfrak{A}$ מודל $\neg\phi$ כנדרש.
נניח $\Gamma \models \neg\phi$. נניח בשלילה כי קיים מודל $\mathfrak{A}$ ל-$\Gamma \cup \{\phi\}$. אז בפרט $\mathfrak{A}$ מודל ל-Γ. לכן מהנתון $\mathfrak{A}$ מודל ל-$\neg\phi$ וזו סתירה לכך ש-$\mathfrak{A}$ מודל ל-ϕ.

(ה) נובע ישירות מכך ש: $\Delta \equiv \Gamma$ אסם $Models(\Gamma) = Models(\Delta)$, ו-$\Delta \models \Gamma$ אסם $Models(\Gamma) \subseteq Models(\Delta)$.